学校编码：10384
学号：19020111152534

分类号________密级_______
UDC________

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

Lebesgue-Bochner 空间的强生成性质

The Strongly Generated Properties of Lebesgue-Bochner Spaces

吴泽浩

指导教师姓名： 程立新 教授
程庆进 副教授

专 业 名 称： 基 础 数 学
论文提交日期： 2014 年 月
论文答辩时间： 2014 年 月
学位授予日期： 2014 年 月

答辩委员会主席：____________
评 阅 人：____________

2014 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘要

X 表示 Banach 空间, μ 表示概率测度, $L^1(\mu, X)$ 表示Lebesgue-Bochner 空间, 参考文献[1] 得到主要结果：X 是强自反（或强超自反）生成当且仅当存在自反（或超自反）Banach 空间 Z 以及有界线性算子 $S : Z \longrightarrow L^1(\mu, X)$ 使得对 $L^1(\mu, X)$ 中的弱紧可分解集 K 以及 $\varepsilon > 0$, 都存在 $n \in N$ 使得 $K \subset nS(B_Z) + \varepsilon B_{L^1(\mu,X)}$. 本文在此基础上得到: X 是强自反（或强超自反)生成当且仅当 $L^1(\mu, X)$ 是强自反（或强超自反)生成. 该结论完整地回答了$Schl\ddot{u}chtermann - Wheeler$[2] 提出的问题：是否 X 是强自反生成意味着 Lebesgue-Bochner 空间 $L^1(\mu, X)$ 是强自反生成的. 本文主要利用集值映射方面的重要结果[3] 和技巧以及一般 $Banach$ 空间X和 $L^1(\mu, X)$ 中弱紧集的刻划[4] 来完成证明.

关键词： Lebesgue-Bochner 空间；强自反(或强超自反)生成；可分解集；集值映射.

Abstract

Let X be a Banach space, μ a probability measure and $L^1(\mu, X)$ be Lebesgue-Bochner space.[1] has shown that X is strongly reflexive (resp. super-reflexive) generated if and only if there exist a reflexive (resp. super-reflexive) Banach space Z and a bounded linear operator $S : Z \longrightarrow L^1(\mu, X)$ such that for each weakly compact decomposable set $K \subset L^1(\mu, X)$ and each $\varepsilon > 0$ there is $n \in N$ such that $K \subset nS(B_Z) + \varepsilon B_{L^1(\mu,X)}$. This paper proves that X is strongly reflexive (resp. super-reflexive) generated if and only if $L^1(\mu, X)$ is strongly reflexive (resp. super-reflexive) generated on the basis of the above result. This result is a strengthening one compared with the main result of[1] and it answers absolutely a question posed by $Schl\ddot{u}chtermann - Wheeler$[2] that if X is strongly reflexive generated implies $L^1(\mu, X)$ is strongly reflexive generated. This is done mainly by using important results and techniques about multifunctions [3] combined with characteration of weak compactness in Banach X and $L^1(\mu, X)$ [4].

Key Words: Lebesgue-Bochner space; Strongly reflexive (resp.super-reflexive) generated; Decomposable sets; Multifunctions.

目　录

Contents

第一节 引言

1.1 研究动机

X表示$Banach$空间, 称 X 由 $Banach$ 空间 Y 强自反(或强超自反)生成, 如果 Y 为自反(或超自反)空间且存在有界线性算子 $T: Y \longrightarrow X$ 使得对于任意弱紧集 $K \subset X$ 以及任意$\varepsilon > 0$, 都存在 $n \in N$, 使得 $K \subset nT(B_Y) + \varepsilon B_X$, 其中 B_X, B_Y 分别表示 X 和 Y 的单位球. 由于自反空间（或超自反）空间具有比较好的性质, 因此强自反（或强超自反）生成空间这类空间受到广泛的关注和研究. 利用 $Davis - Figiel - Johnson - Pelczynski$ 给出的因子分解定理 [5] 可以得到： X 是强自反生成当且仅当X是强弱紧生成. X 称为强弱紧生成的是指如果存在弱紧集 $G \subset X$ 使得对每个弱紧集 $K \subset X$ 以及每个$\epsilon > 0$, 都存在 $n \in N$ 使得 $K \subset nG + \varepsilon B_X$. 这类空间是由 $Schlüchtermann - Wheeler$[2] 引入并且 [6], [7] 做了这方面重要的研究. 实际上, X 是强弱紧生成空间所描述的就是 X 包含着一个弱紧集, 该弱紧集能够几乎吸收X中所有弱紧集. 而强弱紧生成性质是弱紧生成性质 (X 称为弱紧生成的是指如果存在弱紧集 K 使得 $X = \overline{span} K$)的强化, 也就是说，如果 X 是强弱紧生成空间, 则 X 是弱紧生成空间, 但该结论的逆命题不成立, 如 c_0 是弱紧生成空间, 但不是强弱紧生成空间. 关于强自反生成空间（即强弱紧生成空间）的典型例子有：自反空间, 具有 $Schur$ 性质的可分空间（由 l^2 强生成）以及 $L^1(\mu)$ 空间, 其中 μ 为任意的概率测度（这类空间由 $L^2(\mu)$ 生成, 参考[6]). 而强自反生成空间要严格强于强超自反生成空间（参考 [1]，也就是说: 强自反生成空间是强超自反生成空间, 但强超自反生成空间不一定是强自反生成空间）. 1988年, $Schlüchtermann - Wheeler$[2]

提出这样的问题：是否 X 是强弱紧生成意味着 Lebesgue-Bochner 空间 $L^1(\mu,X)$ 是强弱紧生成的. 2012 年, *Sebastián Lajara – José Rodríguez*[1] 证明了这样的结果：X 是强自反（或强超自反）生成当且仅当存在自反（或超自反）Banach 空间 Z 以及有界线性算子 $S: Z \longrightarrow L^1(\mu,X)$ 使得对 $L^1(\mu,X)$ 中的弱紧可分解集 K 以及 $\varepsilon>0$, 都存在 $n\in N$ 使得 $K\subset nS(B_Z)+\varepsilon B_{L^1(\mu,X)}$. 显然该结论部分地回答了这个问题, 并未完全解决这个问题. 该结论中对弱紧集做可分解假设是很强的条件, 因为 $L^1(\mu,X)$ 中存在大量的不可分解集如单位球 $B_{L^1(\mu,X)}$. 因此这也遗留了这样的问题：能否将该结论中对弱紧集的可分解假设去掉? 比如：考虑相对弱紧集的可分解包(包含该集合的最小可分解集）是否弱紧? 如果该结论成立的话, 显然对弱紧集的可分解假设可以去掉；如果行不通的话, 也可以考虑先从具有较好性质的弱紧集入手考虑该类弱紧集的可分解包是否弱紧, 然后再过渡到验证对于一般的弱紧集该结论的必要性成立, 从而达到将弱集的可分解假设去掉. 本文正是遵循后者这样的思路, 得到： X 是强自反（或强超自反）生成空间当且仅当 $L^1(\mu,X)$ 是强自反（或强超自反）生成空间. 这是本文的主要结果.

1.2 本文主要工作

本文在 *Sebastián Lajara – José Rodríguez*[1] 主要结果(即引理3.5)的基础上, 得到本文主要结果： X 是强自反（或强超自反）生成空间当且仅当 $L^1(\mu,X)$ 是强自反（或强超自反）生成空间. 其中做下如下工作：在 2.3 节给出了$L^1(\mu,X)$ 中集合可分解包（包含该集合的最小可分解集）的具体形式和构造. 在 3.3 节中得到引理3.6：(1) 若集合 K 的可分解包是有界的，则S^1_F(其定义见引理3.4)也是有界的； (2) 利用集值映射方面的重要结果(引理3.4, 参考[3]) 和技巧以及一般 *Banach* 空间和 $L^1(\mu,X)$ 中弱紧集的刻划[4]得到：如果 $L^1(\mu,X)$ 中的集合K 是可数弱紧、一致有界集, 则 K 的可分解包是相

对弱紧集. 在得到可数弱紧、一致有界集的可分解包是相对弱紧的基础上, 逐步过渡到检验对于一般弱紧集[1]中的主要结果成立. 其中不直接考虑一般弱紧集的可分解包是否弱紧有两个主要原因：一是因为该结论很可能是错误的, 二是它对结论本身不是必要条件, 通过相关运算和技巧得到 X是强自反（或强超自反）生成空间当且仅当 $L^1(\mu, X)$ 是强自反（或强超自反）生成空间.

第二节 预备知识

先介绍 Bochner 积分的定义, 其定义的引入思想类似于 Lebesgue 积分定义的引入，即先引入特征向量值函数的 Bochner 积分的定义, 再过渡到一般可测向量值函数的 Bochner 积分定义的引入.

2.1 Lebesgue-Bochner 空间

定义 2.1： [8] X为一Banach 空间, (Ω, Σ, μ) 为一概率测度空间。 $f = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j}$ 为一向量值简单函数, 其中 $c_j \in X$ $(j = 1, 2, \ldots N)$, $E_j(j = 1, 2, \ldots N)$ 为 Ω 的 Lebesgue 可测集, $\chi_{E_j}(j = 1, 2, \ldots N)$是关于 E_j 的特征函数. 则 f 的 Bochner 积分定义如下: $\int_\Omega f d\mu = \sum_{j=1}^{N} c_j m(E_j)$, 其中 $m(E_j)$ $(j = 1, 2, \ldots N)$ 为 E_j $(j = 1, 2, \ldots N)$ 的 Lebesgue 测度.

注：以下 Ω 没有特别说明都表示概率测度空间, X 表示Banach空间.

定义 2.2： [8] 向量值函数 $f : \Omega \longrightarrow X$ 称为强可测, 如果存在可测的简单函数序列 $f_n : \Omega \to X(n = 1, 2, \ldots)$ 使得 $f_n(\omega)$ 在 Ω 上几乎处处强收敛（范数拓扑意义下收敛）于$f(\omega)$.

命题 2.1： [8] 若$f : \Omega \to X$是强可测的, 则f 是几乎可分值的, 也就是说, 存在一可分集 $Y \subset X$, 使得 $f(\Omega)\backslash Y$ 为零测集.

定义 2.3： [8] 一个强可测向量值函数 $f : \Omega \longrightarrow X$ 称为 Bochner 可积, 如果存在向量值简单函数序列 $f_n : \Omega \to X(n = 1, 2 \ldots)$ 使得 $f_n(\omega)$ 在 Ω 上几乎处处强收敛

于 $f(\omega)$, 并且 $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|f_n(\omega)-f(\omega)\|d\mu(\omega)=0$. 此时, f 的 Bochner 积分定义如下: $\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu$, 其中等式右边极限在$X$的强拓扑（即范数拓扑）的意义下收敛.

命题 2.2: [8] 向量值函数 $f:\Omega\longrightarrow X$ 是 Bochner 可积的, 如果 f 是强可测并且 $\int_\Omega \|f(\omega)\|d\mu(\omega)<\infty$.

由命题 2.2 知要考虑一个强可测向量值函数 $f:\Omega\longrightarrow X$ 是否 Bochner 可积, 只需验证实值函数 $\|f\|:\Omega\longrightarrow R$ 是否 Lebesgue 可积. 这正是下面$Lebesgue-Bochner$空间定义的由来.

定义 2.4: [8] 给定一个概率测度空间(Ω,Σ,μ), 定义$L^1(\mu,X)$ 为所有 Bochner 可积向量值函数 $f:\Omega\longrightarrow X$ 构成的线性空间, $L^1(\mu,X)$ 上范数定义为 $\|f\|_1=\int_\Omega \|f(\omega)\|d\mu(\omega)$, $\forall f\in L^1(\mu,X)$, 它是一个 Banach 空间，称为$Lebesgue-Bochner$空间.

Lebesgue-Bochner 空间 $L^1(\mu,X)$ 是 L^1 空间的推广, 将 L^1 空间中的函数 f 取值于一般的 Banach 空间 X, 并且 $\|f(\cdot)\|$ 刚好属于 L^1 空间. 关于L^1 的很多经典结论在$L^1(\mu,X)$ 上也成立且 $L^1(\mu,X)$ 上的性质与 $Banach$ 空间 X 密切相关, 例如, 若X具有RNP, $L^1(\mu,X)$ 也具有 $NRNP$. 作为泛函分析领域的重要内容, $L^1(\mu,X)$ 经常用于偏微分方程的研究, 如热传导方程方面的研究, 例如 $g(t,x)$ 是关于时间 t 和空间 X 的温度数值函数, 令 $(f(t))(x)=g(t,x)$, 则 f 是属于某类Lebesgue-Bochner 空间. 此时Lebesgue-Bochner 空间中的相关性质便可以用于这方面的研究.

2.2 超自反空间

长期以来超自反空间在 Banach 空间几何学的研究中起着重要的作用, 它具有很多重要的性质. 1972年, $Enflo$[9] 得到再赋范定理：每个超自反空间都可以

再赋范成为一致凸空间. $James$[10] 得到关于超自反空间的另一个重要的刻划: Banach space X 是超自反当且仅当 X 不具有有限树性质. 也就是说, 对于每个$\varepsilon > 0$, 对于充分大的$n \in N$, B_X 不具有 (n, ϵ) 树. Banach 空间的超性质（如超自反）是在有限表示的基础上定义的, 而有限表示是 Banach 空间局部理论中重要的一部分, $J.Lindenstrauss - A.Pelcznski$[11], $J.Lindenstrauss - H.P.Rosenthal$[12] 和 $R.C.James$[10] 的研究工作开拓了 Banach 空间局部理论, 它主要揭示无穷维 Banach 空间与有限维子空间的结构关系, 首先它涉及到一个重要定义：Banach-Mazur 距离.

定义 2.5： [10] 两个 Banach 空间 X, Y 间的 Banach-Mazur 距离定义为: $d\,(X,Y) = \inf\{\|T\|\cdot\|T^{-1}\| : T$ 为 X 到 Y 的线性同构$\}$. 若 X 与 Y 不线性同构, 则令 $d\,(X,Y) = \infty$.

1972年，James 在他的超自反理论中给出了有限表示的定义：

定义 2.6： [10] 设 X, Y 为无穷维 Banach 空间, 称 X 可在 Y 中有限表示，如果对任意 $\varepsilon > 0$ 以及 X 中的任意有限维子空间 E,，都存在 Y 中的有限维子空间 F, 使得 $dim\ E = dim\ F$ 以及存在线性同构 $T : E \longrightarrow F$ 满足 $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$, 即 $d\,(X,Y) \leq 1 + \varepsilon$. 如果 X 可在 Y 中有限表示, 记作 $X \prec Y$.

注：定义中可设 $\|T\| = 1, \|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$.

性质[10]：(i) 若 $X \prec Y$, $Y \prec Z$ 则 $X \prec Z$ (ii) $X \prec X$

关于空间的有限表示有下面经典的几个例子.

例 2.1： (i) $L_p \prec l_p$ $(1 \leq p < \infty)$

(ii) X 为 Banach 空间，则 $l_2 \prec X$ (Dvoretzky's 定理)

(iii) X 为Banach 空间，则 $X^{**} \prec X$ (局部自反原理)

定义 2.7： [10] Banach 空间 X 是超自反的, 如果每个可在 X 中有限表示的 Banach 空间 Y 都是自反的.

2.3 可分解集

可分解集的定义是在 Bochner 积分的背景下提出来的, 用来替代凸性. 凸性和可分解性的关系受到广泛的关注和研究(如[13],[14]),[14] 得到这样的结论：$L^1(\mu, X)$ 中的任何弱紧可分解集是凸集.

定义 2.8： [1] $L^1(\mu, X)$ 中的子集 D 称为可分解的, 如果 $\forall f, g \in D$, $\forall A \in \Sigma$, 有 $f \cdot \chi_A + g \cdot \chi_{\Omega \setminus A} \in D$.

例 2.2： [1] W 为 X 的任一子集, 则集合 $L(W) \equiv \{f \in L^1(\mu, X) : f(\omega) \in W,\ \forall a.e.\ \omega \in \Omega\}$ 是 $L^1(\mu, X)$ 中的可分解集.

定义 2.9： [1] 集合$K \subset L^1(\mu, X)$ 的可分解包为包含 K 的最小可分解集, 记为 $dec\ K$.

命题 2.3： 集合$K \subset L^1(\mu, X)$, 则 $dec\ K = \{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \chi_{A_i} : f_i \in K\ (i = 1, 2, \ldots, n),\ \{A_i\}_{i=1}^{n}$ 为Ω 的任一有限分划$\} \equiv \widetilde{K}$.

证明： 显然 $K \subset \{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \chi_{A_i} : f_i \in K\ (i = 1, 2, \ldots, n),\ \{A_i\}_{i=1}^{n}$ 为 Ω 的任一有限分划$\} \equiv \widetilde{K}$, 且$\widetilde{K}$ 为可分解集. 下证 $\widetilde{K}$ 为包含 K 的最小分解集, 即若可分解集 $D \supset K$, 则有$D \supset \widetilde{K}$. 因此只需证 $\forall\ \{f_k\}_{k=1}^{n} \subset D$ 以及对于 Ω 的任一有限分划$\{A_k\}_{k=1}^{n}$, 有 $\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot \chi_{A_k} \in D$, 下面用数学归纳法证明该结论. 当 $n = 1, 2$ 时, 由可分解集的定义知结论显然成立. 假设结论对$n = m$ 时成立, 下证结论对 $n = m + 1$时成立. $\forall\ \{f_k\}_{k=1}^{m+1} \subset D$ 以及Ω 的任一有限分划$\{A_k\}_{k=1}^{m+1}$, 令$B_k = A_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $B_m = A_m \cup A_{m+1}$, 则

$\{B_k\}_{k=1}^m$ 为 Ω 的一个有限分划, 因此由归纳假设知 $h \equiv \sum_{k=1}^{m} f_k \cdot \chi_{B_k} \in D$, 又因为 $h \equiv \sum_{k=1}^{m} f_k \cdot \chi_{A_k} + f_m \cdot \chi_{A_{m+1}}$ 知 $\sum_{k=1}^{m} f_k \cdot \chi_{A_k} = h \cdot \chi_{\Omega \setminus A_{m+1}}$，因此由 $f_{m+1} \in D$, $h \in D$ 知 $\sum_{k=1}^{m+1} f_k \cdot \chi_{A_k} = f_{m+1} \cdot \chi_{A_{m+1}} + \sum_{k=1}^{m} f_k \cdot \chi_{A_k} = f_{m+1} \cdot \chi_{A_{m+1}} + h \cdot \chi_{\Omega \setminus A_{m+1}} \in D$,于是结论对于 $n = m+1$ 成立, 证毕. □